લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક **અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 12**

PART A

1. (B) **2.** (D) **3.** (A) **4.** (B) **5.** (C) **6.** (A) **7.** (A) **8.** (C) **9.** (A) **10.** (B) **11.** (A) **12.** (A) **13.** (A) **14.** (C) **15.** (D) **16.** (B) **17.** (B) **18.** (B) **19.** (A) **20.** (B) **21.** (C) **22.** (A) **23.** (B) **24.** (B) **25.** (D) **26.** (D) **27.** (B) **28.** (A) **29.** (A) **30.** (A) **31.** (A) **32.** (D) **33.** (D) **34.** (A) **35.** (B) **36.** (D) **37.** (A) **38.** (D) **39.** (B) **40.** (C) **41.** (B) **42.** (C) **43.** (A) **44.** (B) **45.** (B) **46.** (A) **47.** (B) **48.** (D) **49.** (A) **50.** (B)

PART B

વિભાગ-A

1.

અહીં, $x = sec\theta$, તો

$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{sec^2\theta - 1} = tan\theta$

આથી, $cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = cot^{-1}(cot\ \theta) = \theta = sec^{-1}x.$

માંગેલ સાદું સ્વરૂપ છે.

2.

$tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{2}\ tan^{-1}x$

$\therefore\ 2tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = tan^{-1}x$

ધારો કે, $tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \alpha$

$\therefore\ \dfrac{1-x}{1+x} = tan\ x$

$\therefore\ 2\ tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = tan^{-1}x$

$\therefore\ 2x = tan^{-1}x$

$\therefore\ tan\ 2x = x$

$\therefore\ \dfrac{2\ tan\ \alpha}{1-tan^2\alpha} = x$

$\therefore\ \dfrac{2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = x$

$\therefore\ \dfrac{2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot(1+x)^2}{(1+x)^2-(1-x)^2} = x$

$\therefore\ \dfrac{2(1-x)(1+x)}{1+2x+x^2-1+2x-x^2} = x$

$\therefore\ \dfrac{2-2x^2}{4x} = x$

$1 - x^2 = 2x^2$

$\therefore\ 3x^2 = 1$

$\therefore\ x^2 = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(\because\ x > 0)$

ચકાસણી :

ડા.બા. $= tan^{-1}\left(\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}\right)$

$= tan^{-1}(2 - \sqrt{3})$

$= tan^{-1}\left(tan\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\pi}{12}$

$$\text{જ.બા.} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

∴ ડા.બા. = જ.બા.

$$\therefore \text{ ઉકેલ ગણ } = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

3.

➪ બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore x\cdot\frac{dy}{dx} + y + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = sec^2x + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore x\cdot\frac{dy}{dx} + 2y\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = sec^2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(x + 2y - 1) = sec^2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{sec^2x - y}{x + 2y - 1}$$

4.

➪ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, sin^2x એ એક યુગ્મ વિધેય છે.

તેથી ગુણધર્મ (8)(i) પ્રમાણે,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - cos\, 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - cos\, 2x)\, dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2} sin\, 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\, sin\, \frac{\pi}{2}\right] - 0$$

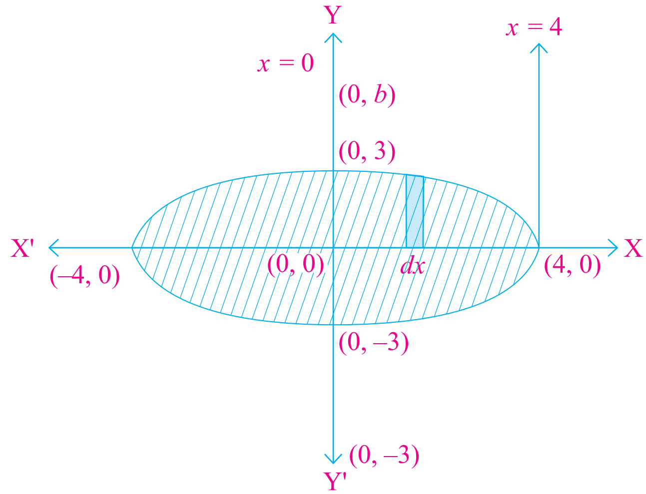
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

5.

➪ $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16,\ a = 4\ (a > b)$

$b^2 = 9,\ b = 3$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ

વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

∴ A = 4|I|

$$I = \int_0^4 y\, dx$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

$$\therefore y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$$

$$\therefore y^2 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

$$I = \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx$$

$$I = \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\, sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{2}(0) + 8\, sin^{-1}(1)\right) - \left(0 + sin^{-1}(0)\right)\right]$$

$$I = \frac{3}{4}\left(8\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$I = 3\pi$

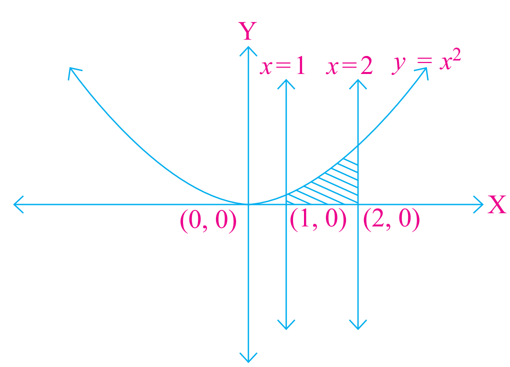
હવે, A = 4|I|

= 4|3π|

∴ A = 12π ચોરસ એકમ

6.

➪ $x^2 = y$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ,

$A = |I|$

$\therefore \; I = \int_1^2 y \, dx$

$\therefore \; I = \int_1^2 x^2 \, dx$

$\therefore \; I = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$

$\therefore \; I = \frac{1}{3} \left((2)^3 - (1)^3\right)$

$\therefore \; I = \frac{7}{3}$

હવે, $A = |I| = \left|\frac{7}{3}\right|$

$\therefore \; A = \frac{7}{3}$ ચોરસ એકમ

7.

$\frac{dy}{dx} = sin^{-1}x$

$\therefore dy = sin^{-1}x \cdot dx$

$\rightarrow$ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \int 1 \, dy = \int sin^{-1}x \, dx$

$\therefore y = [sin^{-1}x \int 1 \, dx] - \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int 1 \, dx\right] dx$

($\because$ ખંડશઃ સંકલન અનુસાર)

$\therefore y = x \cdot sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

$\therefore y = x \, sin^{-1}x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} (-2x) \, dx$

$\therefore y = x \, sin^{-1}x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \frac{d}{dx}(1 - x^2) dx$

$\therefore y = x \, sin^{-1}x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$\therefore y = x \, sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c;$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

8.

$(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$

$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 6 & 27 \\ 1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} = \vec{0}$

$\therefore \; \hat{i}(6\mu - 27\lambda) - \hat{j}(2\mu - 27) + \hat{k}(2\lambda - 6) = \vec{0}$

$\therefore \; 2\mu - 27 = 0; \; 2\lambda - 6 = 0; \; 6\mu - 27\lambda = 0$

$\therefore \; \mu = \frac{27}{2}; \; \lambda = 3$

9.

$\alpha = 90°, \beta = 135°, \gamma = 45°$

રેખાની દિક્કોસાઇન,

$cos \; \alpha = cos \; 90° = 0;$

$cos \; \beta = cos \; 135° = cos(90 + 45)°$

$= -sin \; 45°$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$

તથા $cos \; \gamma = cos \; 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ રેખાની દિક્કોસાઇન $= 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

10.

$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{1}$

$\therefore L : \vec{r} = (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$\therefore \; \vec{b_1} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \Leftarrow a_1 + \lambda b_1$

તથા $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

$\therefore M : \vec{r} = (5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \mu(4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k})$

$\therefore \; \vec{b_2} = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}$

જો L અને M વચ્ચેનો ખૂણો α હોય તો,

$cos \; \alpha = \frac{|\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}|}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$ .... (1)

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k})$

$= 8 + 2 + 8$

$= 18$

હવે, $|\vec{b_1}| = \sqrt{4+4+1}$

$= 3$

$|\vec{b_2}| = \sqrt{16+1+64}$

$= 9$

પરિણામ (1) પરથી,

$\therefore cos \; \alpha = \frac{|18|}{(3)(9)}$

$\therefore \alpha = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

આથી, બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ મળે.

11.

(i) A એ Bનો ઉપગણ હોય,

$A \subset B$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)$

$\therefore P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{P(A)}{P(A)}$

$= 1$ $(\therefore P(A) \neq 0)$

12.

$S = \{(g, g), (b, g), (g, b), (b, b)\}$ $n = 4$

(i) ઘટના A : ઓછામાં ઓછું એક બાળક છોકરો છે.

$A = \{(b, g), (g, b), (b, b)\}$

$r = 3$

$\therefore P(A) = \frac{3}{4}$

ઘટના B : બંને બાળકો છોકરાં હોય.

$B = \{(b, b)\}$

$r = 1$

$\therefore P(B) = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{(b, b)\}$

$r = 1$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$\therefore P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

(ii) ઘટના A : મોટું બાળક છોકરી હોય.

$A = \{(g, b), (g, g)\}$

$r = 2$

$\therefore P(A) = \frac{2}{4}$

ઘટના B : બંને બાળકો છોકરી હોય.

$B = \{(g, g)\}$

$r = 1$

$\therefore P(B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$\therefore P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

વિભાગ-B

13.

ધારો કે, $f(x_1) = f(x_2)$.

આપણે નોંધીએ કે જો x_1 અયુગ્મ અને x_2 યુગ્મ હોય તો આપણને $x_1 + 1 = x_2 - 1$, એટલે કે $x_2 - x_1 = 2$ મળે છે, જે શક્ય નથી.

આ જ દલીલનો ઉપયોગ કરીને x_1 યુગ્મ અને x_2 અયુગ્મ શક્યતાને પણ નકારી શકાય.

તેથી, x_1 અને x_2 બંને યુગ્મ અથવા બંને અયુગ્મ જ હોવા જોઈએ.

ધારો કે, x_1 અને x_2 બંને અયુગ્મ છે.

તેથી $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$.

આ જ પ્રમાણે, જો x_1 અને x_2 બંને યુગ્મ હોય તો પણ $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$.

આમ, f એક-એક વિધેય છે.

વળી, સહપ્રદેશ N ની કોઈ પણ અયુગ્મ સંખ્યા $2r - 1$ એ પ્રદેશ N ની સંખ્યા $2r$ નું પ્રતિબિંબ છે. ($r = 1, 2, 3, ...$) તથા N ની કોઈ પણ યુગ્મ સંખ્યા $2r$ છે તે પ્રદેશ N ની સંખ્યા $2r - 1$ નું પ્રતિબિંબ છે.

આમ, f વ્યાપ્ત છે.

14.

$$[1 \;\; 2 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

$$\therefore [1 + 4 + 1 \quad 2 + 0 + 0 \quad 0 + 2 + 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

$$\therefore [6 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

$\therefore [0 + 4 + 4x] = [0]$

$\therefore 4 + 4x = 0$

$\therefore 4x = -4$

$\therefore x = -1$

15.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{vmatrix}$$

$= (67)(61) - (87)(47)$

$= 4087 - 4089$

$= -2 \neq 0$

$\therefore (AB)^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

આથી, $adj\,(AB) = \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} adj\, AB = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad ... (1)$$

→ A^{-1} મેળવવા માટે,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 15 - 14$$

$$= 1 \neq 0$$

A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 54 - 56$$

$$= -2 \neq 0$$

B^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$$adj\ B = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\ adj\ B$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\ A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

પરિણામ 1 અને 2 પરથી, $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

16.

➪ ધારો કે, $u = x^{sinx}$ અને $v = (sinx)^{cosx}$

$\therefore\ y = u + v$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \ldots\ldots (1)$$

અહીં, $u = x^{sinx}$ ની

હવે, બંને બાજુ log લેતાં,

$log\ u = sinx \cdot logx$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{u} = sin\ x\ \frac{d}{dx}\ log\ x + logx\ \frac{d}{dx}\ sinx$$

$$= sinx\left(\frac{1}{x}\right) + logx \cdot cosx$$

$$\therefore\ \frac{du}{dx} = u\left[\frac{sin x}{x} + logx\ \cdot\ cos x\right]$$

$$\therefore\ \frac{du}{dx} = x^{sinx}\left[\frac{sin x}{x} + logx\ \cdot\ cos x\right] \qquad \ldots\ldots (2)$$

હવે, $v = (sinx)^{cosx}$ ની

બંને બાજુ log લેતાં,

$log\ v = cosx\ log(sinx)$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = cosx \cdot \frac{d}{dx}\ log\ sinx + logsinx\ \frac{d}{dx}\ cosx$$

$$= cosx \cdot \frac{1}{sin x}\ \frac{d}{dx}\ sinx$$

$$+\ logsinx\ (-\ sinx)$$

$$\therefore\ \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = cotx \cdot cosx - sinx\ \cdot logsinx$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dx} = v\ [cotx \cdot cosx - sinx\ \cdot logsinx]$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dx} = (sinx)^{cosx}\ [cotx \cdot cosx - sinx \cdot logsinx]$$

$$\ldots\ldots (3)$$

પરિણામ (1) માં પરિણામ (2) અને (3) ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = x^{sinx}\left[\frac{sinx}{x} + logx \cdot cosx\right]$$

$$+ (sinx)^{cosx}\ [cotxcosx - sinx\ log\ sinx]$$

17.

➪ પ્રત્યેક $x \geq 0$ માટે,

હેલિકોપ્ટરનું સ્થાન $(x, x^2 + 7)$ બિંદુએ છે.

આથી, (3, 7) આગળ ઊભેલ સૈનિક તથા હેલિકોપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$ એટલે કે $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ છે.

ધારો કે, $f(x) = (x - 3)^2 + x^4$

$\therefore\ f'(x) = 2(x - 3) + 4x^3$

$= 2(x - 1)\ (2x^2 + 2x + 3)$

આથી, $f'(x) = 0$ લેતાં,

$x = 1$ અથવા $2x^2 + 2x + 3 = 0$ મળે.

પરંતુ, $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ નથી. જેના માટે $f'(x) = 0$ હોય, તેવા ગણમાં ઉમેરવા માટે અંતરાલનું કોઈ અંત્યબિંદુ છે જ નહિ.

એટલે કે, માત્ર એક જ નિર્ણાયક સંખ્યા $x = 1$ મળે.

આ બિંદુ આગળ વિધેય f નું મૂલ્ય

$f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$ મળે.

આથી, સૈનિક તથા હેલિકોપ્ટર વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$
નોંધીએ કે, $\sqrt{5}$ એ મહત્તમ મૂલ્ય કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોઈ શકે.
વળી, $\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$
આ દર્શાવે છે કે, $\sqrt{5}$ એ $\sqrt{f(x)}$ ની ન્યૂનતમ કિંમત છે.
આથી, સૈનિક તથા હેલિકોપ્ટર વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર $\sqrt{5}$ છે.

18.

➪ (i) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં અંતર્વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાન સદિશ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a}+\vec{b})+(3\vec{a}-2\vec{b})}{2+1}$$
$$= \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતાં રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુ R નો સ્થાન સદિશ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a}+\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})}{2-1}$$
$$= 4\vec{b}-\vec{a}$$

19.

➪ (1) અને (2) ને અનુક્રમે $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ સાથે સરખાવતાં, આપણને
$\vec{a_1} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b_1} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{a_2} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
અને $\vec{b_2} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ મળે.
માટે, $\vec{a_2} - \vec{a_1} = \hat{i} - \hat{k}$
અને $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

તેથી $|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{9+1+49}$
$= \sqrt{59}$

આથી, આપેલી રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$d = \left|\frac{(\vec{b_1}\times\vec{b_2}).(\vec{a_2}-\vec{a_1})}{|\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}\right|$$
$$= \left|\frac{3-0+7}{\sqrt{59}}\right| = \frac{10}{\sqrt{59}} \text{ એકમ}$$

20.

➪ $x + 2y \geq 100$
$2x - y \leq 0$
$2x + y \geq 200$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 5x + 10y$

$x + 2y = 100$ ... (i)

x	0	100	(0, 50) ✓
y	50	0	(100, 0) ×

$2x - y = 0$ ... (ii)

x	0	1	(0, 0) ×
y	0	2	(1, 2)

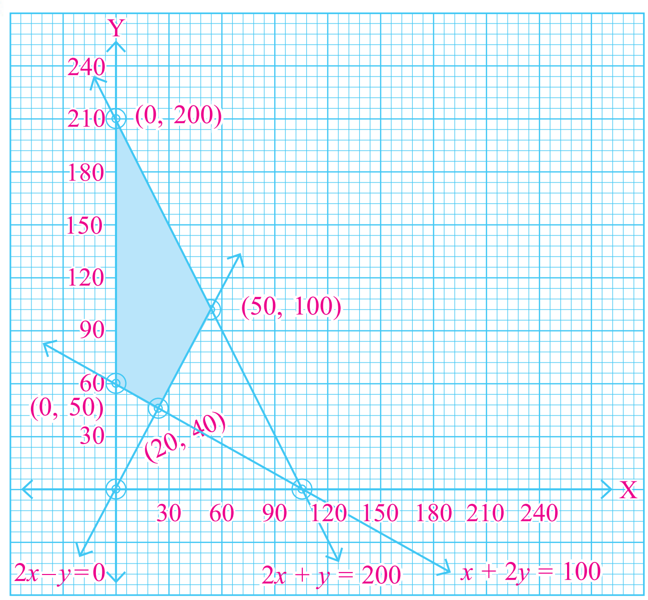
$2x + y = 200$ ... (iii)

x	0	100	(0, 200) ✓
y	200	0	(100, 0) ×

(i) અને (ii) નો લોપ,
$\therefore x + 2(2x) = 100$
$\therefore 5x = 100$ ...(1)
$\therefore x = 20 \qquad \therefore y = 40$
$\therefore (20, 40)$ ✓

(ii) અને (iii)નો લોપ,
$2x + y = 200$
$2x - 2y = 0$
$4x = 200$
$\therefore x = 50 \qquad \therefore y = 100$
$\therefore (50, 100)$ ✓

(i) અને (iii)નો લોપ,
$x + 2y = 100$
$4x + 2y = 400$
$\underline{- \quad - \quad -}$
$3x = 300$
$\therefore x = 100 \qquad \therefore y = 0$
$\therefore (100, 0)$ ×



આકૃતિમાં આપેલ અસમતાઓનો આલેખ દર્શાવ્યો છે જે સિમિત છે શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુઓ (0, 200), (0, 50), (20, 40) અને (50, 100) મળે.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	$Z = x + 2y$
(20, 40)	100 ← ન્યૂનતમ
(50, 100)	250
(0, 200)	400 ← મહત્તમ
(0, 50)	100 ← ન્યૂનતમ

આમ, Z નું મહત્તમ મૂલ્ય 400 બિંદુ (0, 200) આગળ મળે તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય બિંદુઓ (20, 40) અને (0, 50) આગળ મળે.

21.

ઘટના E_1 : પાસો ઉછાળતા પાસા પર 5 કે 6 મળે.

ઘટના E_2 : પાસો ઉછાળતા પાસા પર 1, 2, 3 અથવા 4 મળે.

$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ઘટના A : સિક્કા પર છાપ મળે.

બરાબર એક છાપ મળી હોય અને પાસા પર 1, 2, 3 અથવા 4 હોય તેની સંભાવના,

$P(A \mid E_1)$ = સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળતા તેના પર બરાબર એક છાપ મળે તેની સંભાવના અને પાસા ઉપર 5 કે 6 મળે.

$\therefore\ P(A \mid E_1) = \frac{3}{8}$

$P(A \mid E_2)$ = સિક્કો એક વખત ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે તેની સંભાવના અને પાસા પર 1, 2, ,3 4, મળે.

$\therefore\ P(A \mid E_2) = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{11}{24}$$

$$\therefore\ P(E_2 \mid A) = \frac{P(A \mid E_2) \cdot P(E_2)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{24}}$$

$$= \frac{8}{11}$$

વિભાગ-C

22.

અહીં, $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3+3 & 3-2 & -1-4 \\ -2+3 & -2-2 & 1-5 \\ -4-1 & -5+1 & 2+2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ P = P^T$

$\therefore$ P એ સંમિત શ્રેણિક છે.

$$Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3-3 & 3+2 & -1+4 \\ -2-3 & -2+2 & 1+5 \\ -4+1 & -5-1 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ Q = -Q^T$

$\therefore$ Q એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$$P + Q = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

23.

➪ ધારો કે, 1 કિગ્રા ડુંગળીની કિંમત $= ₹\ x$

1 કિગ્રા ઘઉંની કિંમત $= ₹\ y$

1 કિગ્રા ચોખાની કિંમત $= ₹\ z$

4 કિગ્રા ડુંગળી, 3 કિગ્રા ઘઉં, 2 કિગ્રા ચોખાની કિંમત = ₹ 60

$\therefore\ 4x + 3y + 2z = 60$

2 કિગ્રા ડુંગળી, 4 કિગ્રા ઘઉં, 6 કિગ્રા ચોખાની કિંમત = ₹ 90

$\therefore\ 2x + 4y + 6z = 90$

6 કિગ્રા ડુંગળી, 2 કિગ્રા ઘઉં, 3 કિગ્રા ચોખાની કિંમત = ₹ 70

$\therefore\ 6x + 2y + 3z = 70$

$4x + 3y + 2z = 60$

$2x + 4y + 6z = 90$

$6x + 2y + 3z = 70$

➪ શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ AX = B$

જ્યાં, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$

$AX = B$

$\therefore\ X = A^{-1}B$

➪ A^{-1} શોધવા માટે,

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 4(12 - 12) - 3(6 - 36) + 2(4 - 24)$

$= 0 - 3(-30) + 2(-20)$

$= 90 - 40$

$= 50 \neq 0$

$\therefore\ A^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

➪ *adj* A મેળવવા માટે,

4 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(12 - 12)$

$= 0$

3 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)(6 - 36)$

$= 30$

2 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(4 - 24)$

$= -20$

2 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)(9 - 4)$

$= -5$

4 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(12 - 12)$

$= 0$

6 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1)(8 - 18)$

$= 10$

6 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

$= 1(18 - 8)$

$= 10$

2 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

$= (-1)(24 - 4)$

$= -20$

3 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1(16 - 6)$

$= 10$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$$

$$= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

➪ $X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 - 450 + 700 \\ 1800 + 0 - 1400 \\ -1200 + 900 + 700 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 250 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x = 5,\ y = 8,\ z = 8$

આથી, 1 કિગ્રા ડુંગળીની કિંમત = ₹ 5

1 કિગ્રા ઘઉંની કિંમત = ₹ 8

1 કિગ્રા ચોખાની કિંમત = ₹ 8 થાય.

24.

આપેલ છે કે, $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$

આથી, $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6(e^{2x} + e^{3x})$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6(2e^{2x} + 3e^{3x})$

આથી, $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y$

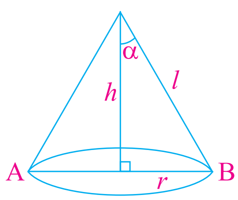
$= 6(2e^{2x} + 3e^{3x}) - 30(e^{2x} + e^{3x}) + 6(3e^{2x} + 2e^{3x})$

$= 0$

25.

ધારો કે શંકુની પાયાની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h અને તિર્યક ઊંચાઈ l છે.

$\therefore l^2 = h^2 + r^2$



શંકુનો અર્ધશિરઃ કોણ α છે.

$\therefore \sin\alpha = \frac{r}{l}$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{r}{l}\right)$

શંકુનું પૃષ્ઠફળ (S) $= \pi rl + \pi r^2$ .... (1)

$\therefore S = \pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}\right) + \pi r^2$

$\therefore S = \pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}\right) + r)$

$\therefore \frac{S}{\pi r} = \sqrt{h^2+r^2} + r$

$\therefore \frac{S}{\pi r} - r = \sqrt{h^2+r^2}$

$\therefore \left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 = h^2 + r^2$ .... (2)

શંકુનું ઘનફળ (V) $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2$

$\therefore V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4\left(\left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 - r^2\right)$ ($\because$ પરિણામ (2))

$\therefore V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4\left(\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi} + r^2 - r^2\right)$

$\therefore V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4\left(\frac{S^2 - 2S\pi r^2}{\pi^2 r^2}\right)$

$\therefore V^2 = \frac{1}{9}r^2(S^2 - 2S\pi r^2)$

$\therefore V^2 = \frac{r^2S^2}{9} - \frac{2S\pi r^4}{9}$

$f(r) = \frac{r^2S^2}{9} - \frac{2S\pi r^4}{9}$

$\therefore f'(r) = \frac{2r\cdot S^2}{9} - \frac{8r^3S\pi}{9}$

$\therefore f''(r) = \frac{2S^2}{9} - \frac{24r^2S\pi}{9}$ .... (3)

→ હવે, લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$f'(r) = 0$

$\therefore \frac{2rS^2}{9} - \frac{8r^3S\pi}{9} = 0$

$\therefore \frac{2rS^2}{9} = \frac{8S\pi r^3}{9}$

$\therefore S = 4\pi r^2$

→ $S = 4\pi r^2$ પરિણામ (3) માં મૂકતાં,

$\therefore f''(r) = \frac{2}{9}(16\pi^2r^4) - \frac{24r^2\pi(4\pi r^2)}{9}$

$= \frac{32\pi^2r^4}{9} - \frac{96\pi^2r^4}{9}$

$\therefore f''(r) = \frac{-64\pi^2r^4}{9} < 0$ ($\because r^4 > 0$)

$\therefore f$ ને મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

→ $S = 4\pi r^2$ એ પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\therefore \pi rl + \pi r^2 = 4\pi r^2$

$\therefore \pi rl = 3\pi r^2$

$\therefore l = 3r$

$\therefore \frac{l}{r} = 3$

$\therefore \frac{r}{l} = \frac{1}{3}$

→ અર્ધશિરઃ કોણ $= \sin^{-1}\left(\frac{r}{l}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

26.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1-(1-\sin 2x)}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{\sqrt{1-(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x)}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}$$

હવે, $\sin x - \cos x = t$ આદેશ લેતાં,

$\therefore\ (\cos x + \sin x)\, dx = dt$

જ્યારે $x = \frac{\pi}{6}$ ત્યારે $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$ ત્યારે $t = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$I = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$I = \left[\sin^{-1}(t)\right]_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] - \sin^{-1}\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right] + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$$

$$I = 2\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$$

27.

રીત 1 :

આપેલ વિધેય $y = e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$ ... (1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુએ x ની સાપેક્ષે

વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[-bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx] + [c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]\, e^{ax} \cdot a$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \quad ...\ (2)$$

→ સમીકરણ (2) ની બંને બાજુએ x ની સાપેક્ષે

વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)(-b \sin bx) + (ac_2 - bc_1)(b \cos bx)] + [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\, e^{ax} \cdot a$$

$$= e^{ax}[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

→ $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ અને y ની કિંમતો આપેલ

વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$\text{ડા.બા.} = e^{ax}[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx] - 2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] + (a^2 + b^2)e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0 \times \cos bx]$$

$$= e^{ax} \times 0$$

$$= 0$$

= જ.બા.

આથી, આપેલ વિધેય એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

રીત 2 :

$$ye^{-ax} = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx$$

$$\therefore\ e^{-ax}y_1 - aye^{-ax} = -bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx$$

$$\therefore\ y_2e^{-ax} - 2ae^{-ax}y_1 + a^2ye^{-ax} = -b^2c_1 \cos bx - b^2c_2 \sin bx = -b^2\, ye^{-ax}$$

$$\therefore\ y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)\, y = 0$$